Concursul interjudeţean de matematică Victor Vâlcovici

Brăila, 20 Mai 2017

Clasa a 7-a

Problema 1. Fie A o mulţime cu 2017 elemente cu proprietatea că pentru orice $x \in A$, $2016 \leq x \leq 2017$. Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$ considerăm expresia $E(t) = 2t - 2017$. Arătaţi că există $a, b \in A, a \neq b$ cu proprietatea că

$$|E(a) - E(b)| \leq \frac{1}{1008}.$$

Problema 2. Considerăm $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ şi mulţimea $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{N}$, unde $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Se ştie că pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n-2\}$ avem $x_k + k\sqrt{x_{k+1}} \in A$.

(a) Determinaţi toate valorile pe care le poate lua n.
(b) Dacă $101 \in A$, determinaţi mulţimea A.

Problema 3. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex pe care fiecare dintre dreptele AD, BE şi CF îl împarte în câte două patrulatere cu suprafeţe egale.

(a) Demonstraţi că $\Delta ACE \sim \Delta DFB$.
(b) Demonstraţi că dreptele AD, BE şi CF sunt concurente.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte